Journal of
Study and Innovation in Education and Development Volume 5, Issue 1 (2024): 109-128

# The Relationship Between the Components of Students' Produced Representations and Their Problem-Solving Ability

**Fatemeh Zarei[1], Majid Haghverdi[2]*, Farhad Hosseinzadeh Lotfi[3], Mohammad Hassan Behzadi[3]**

1. PhD Student of Mathematics Education, Science and Research Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran
2. Associate Professor, Department of Mathematics, Arak Branch, Islamic Azad University, Arak, Iran
3. Department of Mathematics, Science and Research Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran

**Received:** 05 Feb 2025
**Accepted:** 15 Mar 2025
**Available Online:** 28 Mar 2025

**ABSTRACT**

The aim of this study is to examine the relationship between the students' produced representations and their problem-solving ability. This research investigates the depictive features produced by students, including *mathematical structure*, *mathematical matching*, and *degree of abstract*, based on the framework introduced by Ott (2016) in solving mathematical word problems. In this study, students' drawings and sketches were used as depictive representations. A total of 73 fourth-grade students participated in the study. Data were collected through pre-test and post-test assessments. The tests consisted of eight word problems, and a two-week intervention was conducted after the pre-test. Each week, students were given four mathematical word problems and were asked to create depictive representations for them based on Cox's model (1999). These representations included all necessary elements for understanding the problem, after which they were asked to solve the problem. Some students were invited to present their representations and solutions in class if they wished. The findings of this study showed that the generated representations and reflection on the documents help to facilitate the problem solving process.

**Keywords**

Mathematical structure, Mathematical matching, Degree of abstract, Word problem-solving

**How to cite:**

Zarei, F., Haghverdi, M., Hosseinzadeh Lotfi, F., & Behzadi, M. H. (2025). The Relationship Between the Components of Students' Produced Representations and Their Problem-Solving Ability. *Study and Innovation in Education and Development, 5*(1), 109-128.

*** Corresponding Author:**

Dr. Majid Haghverdi

E-mail: m-haghverdi@iau.arak.ac.ir

# EXTENDED ABSTRACT

## INTRODUCTION

Mathematical problem-solving is a cornerstone of mathematics education, often posing challenges for students and teachers alike. Researchers have long sought to identify strategies that can enhance students' problem-solving abilities. Among these, the use of depictive representations has emerged as a promising approach. Depictive representations, which transform mathematical information into visual forms, help bridge cognitive gaps between abstract concepts and practical understanding. Studies such as those by Hembree (1992) and Fagnant & Vlassis (2013) have shown that visual aids, when used effectively, can significantly improve students' ability to solve mathematical problems by providing clarity and insight into underlying structural representations are often categorized as descriptive or depictive (5, 6). Descriptive representations focus on symbolic relationships, while depictive ones emphasize visual realism (9).

However, despite their benefits, depictive representations are not universally adopted in problem-solving, particularly among younger learners. Research indicates that students often struggle to create accurate or meaningful representations without explicit instruction and practice. Ott (2016) developed a framework for analyzing depictive representations in word problem-solving, emphasizing the importance of mathematical structure, mathematical matching, and the degree of abstraction (21). This study aims to examine how student-generated depictive representations influence their problem-solving abilities.

## METHODS AND MATERIALS

The study employed a quasi-experimental design involving 73 fourth-grade students divided into intervention and control groups. Data collection consisted of pre-test and post-test phases, with an intervention period spanning two weeks. The pre-test and post-test included eight word problems, designed to assess students' ability to create and utilize depictive representations.

During the intervention, students in the experimental group were tasked with solving four mathematical word problems each week. They were instructed to create depictive representations based on Cox's model (1999), which encourages clarity and comprehensiveness. Students were further prompted to present and discuss their representations in class, fostering reflective and collaborative learning.

Depictive representations were analyzed using an established coding system, focusing on three dimensions: (1) Mathematical structure, which evaluates the clarity of relationships between elements; (2) Mathematical matching, assessing the alignment between the depictive representation and the problem text; and (3) Degree of abstraction, measuring the extent to which the representations emphasize mathematical rather than literal aspects. Statistical analyses, including two-way ANOVA, were conducted to compare the performance of the two groups.

## FINDINGS

The intervention yielded significant improvements in the experimental group's performance across all dimensions. Key findings include:

1. **Mathematical Structure**: Students in the experimental group demonstrated substantial improvement in representing objects and relationships related to the mathematical structure of problems. Post-test scores showed a significant difference between the intervention and control groups ($p < 0.001$), with the experimental group exhibiting richer and more accurate representations.
2. **Mathematical Matching**: The experimental group achieved higher alignment between their depictive representations and the problem text. They demonstrated a better ability to reflect measured values, units, and operators in their diagrams. The intervention group’s post-test performance surpassed that of the control group in this regard, with significant interaction effects noted ($p < 0.001$).
3. **Degree of Abstraction**: While both groups showed limited improvement in abstraction, the experimental group made more consistent use of mathematical symbols and reduced reliance on literal illustrations. The post-test results suggested a trend toward higher abstraction, though not statistically significant compared to the control group.
4. **Problem-Solving Performance**: The experimental group significantly outperformed the control group in overall problem-solving accuracy and completeness. Post-test scores revealed that intervention students were better able to analyze and solve word problems using self-generated depictive representations.

## DISCUSSION AND CONCLUSION

The findings affirm the hypothesis that depictive representations can enhance mathematical problem-solving, particularly when students are actively engaged in generating and reflecting on these representations. The significant improvements observed in mathematical structure and matching suggest that the intervention fostered a deeper understanding of problem elements and their relationships. These results align with earlier studies by Van Dijk et al. (2003), which emphasized the value of reflective practices in improving students' representational skills (19).

However, the findings highlight a potential area for further investigation. The preference for realistic representations among young learners may stem from their developmental stage. Future interventions might explore gradually transition students from literal to abstract representations.

Overall, this study underscores the importance of integrating depictive representations into mathematics education. By allowing students to visualize and externalize their thought processes, these representations serve as both tools for problem-solving and means of communication. The findings suggest that a combination of guided practice, reflective discussions, and classroom integration can significantly enhance students' representational competencies and problem-solving abilities.

In conclusion, fostering the development of depictive representation skills among elementary students has the potential to improve their mathematical reasoning and problem-solving performance. Further research is needed to explore strategies for enhancing abstraction and to investigate the long-term impact of such interventions on students' mathematical development.

# ارتباط بین بازنمایی‌های تولید شده دانش‌آموزان و توانایی حل مسأله در آن‌ها

فاطمه زارعی[1]، مجید حق وردی[2*]، فرهاد حسین زاده لطفی[3]، محمد حسن بهزادی[3]

**۱.** دانشجوی دکتری آموزش ریاضی، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران
**۲.** گروه ریاضی، واحد اراک، دانشگاه آزاد اسلامی، اراک، ایران
**۳.** گروه ریاضی، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

**تاریخ دریافت:** ۱۴۰۳/۱۱/۱۶
**تاریخ پذیرش:** ۱۴۰۳/۱۲/۲۴
**تاریخ چاپ:** ۱۴۰۴/۰۱/۰۸

## چکیده

هدف این پژوهش بررسی ارتباط بین بازنمایی‌های تولید شده دانش‌آموزان و توانایی حل مسأله در آن‌ها می‌باشد. در این پژوهش ویژگی‌های گرافیکی تولید شده (ساختار ریاضی، تطابق ریاضی، درجه انتزاع) دانش‌آموزان بر اساس چارچوب معرفی شده توسط اوت(۲۰۱۶) در حل مسائل کلامی ریاضی مورد بررسی قرار گرفت. در این مطالعه از طرح‌ها و ترسیم‌های دانش‌آموزان به عنوان بازنمایی‌های گرافیکی استفاده گردید. در این مطالعه ۷۳ دانش آموز پایه چهارم شرکت کردند. داده‌ها از طریق پیش‌آزمون و پس آزمون جمع‌آوری شد. آزمون‌ها از ۸ مسئله کلامی طراحی شد و پس از پیش آزمون مداخله‌ای دو هفته‌ای برگزار شد. هر هفته به دانش‌آموزان ۴ مسئله کلامی ریاضی داده شد و از آن‌ها خواسته شد بر اساس مدل ککس (۱۹۹۹) بازنمایی گرافیکی برای آن رسم کنند که شامل همه مواردی بود که برای درک مسئله لازم است و سپس مسئله را حل کنند از برخی دانش‌آموزان خواسته شد که اگر تمایل داشتند بازنمایی و راه‌حل خود را در کلاس ارائه دهند. یافته‌های این مطالعه نشان داد که بازنمایی‌های تولید شده دانش‌آموزان به تسهیل فرایند حل مساله کمک می‌کند.

**واژگان کلیدی**

ساختار ریاضی، تطابق ریاضی، درجه انتزاع، حل مسئله کلامی

**شیوه ارجاع‌دهی:**

زارعی، فاطمه.، حق‌وردی، مجید.، حسین‌زاده لطفی، فرهاد. و بهزادی، محمد حسن. (۱۴۰۴). ارتباط بین بازنمایی‌های تولید شده دانش‌آموزان و توانایی حل مسأله در آن‌ها. *پژوهش و نوآوری در تربیت و توسعه*، *۵*(۱)، ۱۲۸-۱۰۹.

**نویسنده مسئول:**
دکتر مجید حق وردی
پست الکترونیکی: m-haghverdi@iau.arak.ac.ir

## مقدمه

مسائل کلامی بخش مهمی از برنامه درسی ریاضی است که با هدف افزایش مهارت و دانش ریاضی در موقعیت‌های واقعی زندگی دانش‌آموزان ارائه می‌گردد. اهمیت مسائل کلامی در برنامه درسی ریاضی، از یک سو و دشواری حل آن‌ها از سوی دیگر سبب شده است تا پژوهشگران آموزش ریاضی و روان شناسانی که علاقمند به پژوهش در حوزه ریاضی هستند به بررسی فرایند حل مسائل کلامی ریاضی، توجه ویژه‌ای داشته باشند (1). برخی مطالعات نشان داده اند که استفاده از بازنمایی‌های بصری و ملموس، عملکرد را در حل مسائل کلامی بهبود می‌بخشند. تحقیقات نشان داده‌اند اگر استفاده از بازنمایی‌ها به درستی صورت نگیرد ممکن است در روند یادگیری اختلال ایجاد شود مگر آن که یادگیرنده بتواند هر بازنمایی را بطور جداگانه تفسیر کند یا بین انواع بازنمایی‌ها ارتباط و اتصال برقرار کند. در انجام یک فعالیت ریاضی، استفاده از دست نوشته‌ها، یعنی بازنمایی‌هایی که به شکل فیزیکی وجود دارند، امری ضروری است (2)، زیرا بدون چنین بازنمایی‌های فیزیکی، دستیابی به درک ریاضی عملاً غیرممکن است (3). بازنمایی در حال حاضر به عنوان یک صلاحیت ریاضی در استانداردها و برنامه‌های درسی بسیاری از کشورها به عنوان یک اصل محسوب می‌شود. این صلاحیت اغلب با حل مسئله در ارتباط است. علاوه بر این، در برخی تحقیقات، استفاده منعطف‌تری از بازنمایی‌های مختلف برای حل مسئله ریاضی را ضروری قلمداد می‌کنند (4). شورای ملی معلمان ریاضی (۲۰۰۰) اظهار می‌دارد که بازنمایی، ترجمه یک مسئله یا ایده به شکلی جدید، از جمله یک تصویر یا مدل فیزیکی به شکل نمادها، کلمات یا عبارات است. بطور خاص بازنمایی‌های گرافیکی به عنوان ابزاری برای حل مسائل کلامی آموزش داده می‌شوند و توصیفات نوشتاری و بصری به عنوان ابزاری برای درک فرایندهای تفکر دانش‌آموزان عمل می‌کند.

همبری (۱۹۹۲) اذعان داشت که در فرایند حل مساله تولید یک بازنمایی گرافیکی به عنوان یک رهیافت مهم در نظر گرفته می‌شود. در همان زمان، اغلب گزارش می‌شد که بسیاری از یادگیرندگان به ندرت از بازنمایی‌های گرافیکی به عنوان یک رهیافت اکتشافی استفاده می‌کنند (5). این امر به ویژه در دوره ابتدایی مشهود است، جایی که مداخلات شامل بازنمایی‌های گرافیکی برای حل مسئله قابل توجه است (5-7). در مطالعات مداخله‌ای، بازنمایی‌های گرافیکی بیشتر به عنوان ابزاری برای حل مسئله مورد بررسی قرار می‌گیرند (8).

مایر (۱۹۹۲) از منظر روان‌شناسی شناختی، دو فرایند «فهمیدن مسئله و تشکیل بازنمایی از متن مسئله و جستجوی فضای مسئله در حافظه» و «پیدا کردن راه‌حل» برای حل مسائل کلامی ریاضی را، شناسایی کرده است او معتقد است که کار اصلی در حل مسائل کلامی، درک و فهمیدن مسئله است و به‌طورکلی، طراحی حل مسئله، از بازنمایی درست مسئله نشأت می‌گیرد. گلدین و اشتینگولد (۲۰۰۱) تمایز بین اشکال مختلف بازنمایی را مطرح کردند (9). به نظر آن‌ها تمایز بین بازنمایی‌های توصیفی و تصویری در مورد بازنمایی گرافیکی برای مسائل کلامی مفید است. مسائل کلامی مثال خاصی از بازنمایی‌های توصیفی هستند، در حالی که

بازنمایی‌های گرافیکی زیرمجموعه‌ای از بازنمایی‌های تصویری را تشکیل می‌دهند. بازنمایی‌های توصیفی از نمادها تشکیل شده‌اند و با محتوایی که به‌وسیله یک قرارداد ارائه می‌کنند مرتبط هستند پژوهشگران بسیاری طی تحقیقات متعدد، نشان دادند که بازنمایی‌های تصویری، نقش مهمی در درک مفاهیم و فرایند حل مسئله در دوره ابتدایی و متوسطه دارند (10, 11). برای نمونه، کلاین و همکاران (۱۹۹۸) به این نتیجه رسیدند که در ریاضی پایه دوم دوره ابتدایی، استفاده از محور اعداد به عنوان یک مدل قوی برای نمایش اعداد، در یادگیری جمع و تفریق اعداد تا ۱۰۰ توسط کودکان، نقش مهمی ایفا می‌کند.

مسائل کلامی اشکالی از بازنمایی‌های توصیفی هستند. مسائل کلامی می‌توانند به عنوان تکالیفی که در قالب متن ارائه می‌گردد فهمیده شوند (12) و بر روی روابط ریاضی که به صورت شفاهی توصیف شده اند، تمرکز دارند. مسائل کلامی متفاوت از لحاظ معنایی می‌توانند روابط ریاضی یکسانی را توصیف کنند و به عملیات ریاضی یکسانی منتهی شوند (13). لازم به ذکر است که تغییر ساختار سطحی زبان نیز می‌تواند بر دشواری حل مسایل کلامی ریاضی تأثیر بگذارد (14). به عنوان مثال، اگر اطلاعات موجود در متن به ترتیب لازم برای ارائه داده‌ها ذکر شده باشد، این امر تأثیر مثبتی بر روند حل دارد (15). استفاده از مسائل کلامی اغلب مورد انتقاد برخی پژوهشگران از جمله ورشافل و همکاران (۲۰۰۰) قرار گرفته است: یکی از انتقادات اصلی این است که مسائل کلامی که در تمرین‌های کلاس درس بکار گرفته می‌شود، اغلب هیچ نمودی در دنیای واقعی ندارند، بلکه مسائل تصنعی هستند. در همان زمان، گزارش شده است که دانش‌آموزان اغلب "این مسائل را به روشی کلیشه‌ای و روتین حل می‌کنند" (13). با این حال، بسته به نحوه استفاده از آن‌ها در تدریس، مسائل کلامی همچنین توانایی توسعه چندین صلاحیت ریاضی را دارند. به عنوان مثال، می‌توان از آن‌ها برای ایجاد ساختارهای جدید ریاضی، نمادسازی مفاهیم و برای کشف مدل سازی برخی پدیده‌ها در جریان کلاس درس استفاده کرد (13). بازنمایی‌های گرافیکی نیز اشکالی از بازنمایی‌های تصویری هستند. واژه گرافیک به بازنمایی‌هایی اطلاق می‌شود که از نمایش برخی خطاها و خش‌ها تشکیل شده است (16). طرح‌ها و ترسیم‌ها می‌توانند به عنوان بازنمایی‌های گرافیکی درک شوند. در این پژوهش، منظور از بازنمایی گرافیکی همان بازنمایی ایجاد شده به وسیله قلم بر کاغذ توسط دانش آموز است. اِسترن، اِپریا و اِبنِر (۲۰۰۳) معتقدند که بازنمایی‌های گرافیکی با جنبه‌هایی از فضا مشخص می‌شوند که بر روی عناصر محتوا ترسیم می‌شوند. بنابراین در بازنمایی‌های گرافیکی به دلیل موقعیت تک تک عناصر، روابط مستقیماً آشکار می‌شود (17).

نظر به مطالعاتی که در زمینه تولید بازنمایی‌های گرافیکی برای مسائل کلامی انجام شده، از نظر فرگننت و ولسیس (۲۰۱۳) می‌توان دو رویکرد از بازنمایی گرافیکی برای مسایل کلامی، نخست ترغیب دانش‌آموزان به استفاده از انواع شکل‌های معین و ثانیا درگیر کردن دانش‌آموزان برای ایجاد بازنمایی‌های گرافیکی توسط خودشان را مطرح کرد (6). پانتزیارا و همکاران (۲۰۰۹) نشان می‌دهند که شکل‌ها با اولویت شخصی و مدل‌های ذهنی یادگیرندگان هماهنگ نمی‌باشد لذا آن‌ها نتیجه می‌گیرند که تفسیر کردن دیاگرام‌ها نیز برای بهبود صلاحیت استفاده از نمودارها ضروری است. آن‌ها گزارش دادند که دانش‌آموزان اغلب سعی می‌کردند نمودارهای داده شده را به نمایش تصویری تبدیل کنند تا آن‌ها را تفسیر کنند (18). ون دیک و همکاران این دو رویکرد را در کلاس

پنجم مقایسه کردند و زمانی که یادگیرندگان بازنمایی‌های گرافیکی خود را تولید کردند، نتایج بهتری یافتند. آن‌ها نتیجه گرفتند که طراحی مدل‌ها در ترسیم دوبارهٔ آن‌ها ممکن است به بینشی عمیق‌تر در معنا و استفاده از مدل‌ها منجر شود و در نتیجه رویکرد انعطاف‌پذیرتری را در حل مسئله ممکن سازد (19). آنچه مبهم است، تأثیر تدریسی است که ترکیبی از تولید بازنمایی‌های گرافیکی شخص با تفسیر بازنمایی‌های گرافیکی داده شده است.

به عقیده سلتر (۱۹۹۳)، بازنمایی‌های گرافیکی تولید شده توسط یادگیرنده می‌توانند دو عملکرد را انجام دهند: بازنمایی به عنوان ابزار، که به عنوان کمکی برای حل مسئله به معنای بازنمایی شخصی عمل می‌کند. بازنمایی به عنوان مستندات که نتایج و راه حل‌ها را ثبت می‌کنند. در عملکرد دوم، آن‌ها عمومی هستند و به یک مخاطب مرتبط هستند. چنین بازنمایی‌های گرافیکی کامل‌تر، غنی‌تر و مرسوم‌تر از بازنمایی‌های شخصی هستند (16). به نظر می‌رسد نوع بازنمایی گرافیکی به کار گرفته شده توسط دانش آموز بر موفقیت حل مسئله آن‌ها تأثیر دارد: در حالی که ارتباط مثبتی بین بازنمایی طرحواره‌ای و حل مسئله موفقیت آمیز وجود دارد، مطالعه هگارتی و همکاران (۱۹۹۹) نشان داد که تولید بازنمایی‌های تصویری با موفقیت در حل مسئله ارتباط منفی دارد. این یافته‌ها با نتایج مربوط به تکالیف مدل‌سازی مرتبط هستند (20). برخی تحقیقات دیگر از جمله فرگننت و وِلَسیس (۲۰۱۳) لوپز ریِل ووِلو (۱۹۹۳) و وَن اِسِن و همکر (۱۹۹۰) نشان دادند که استفاده از رسم شکل برای حل مسئله توسط فراگیران کاری دشوار است (6-8). لوپز رئال و ولو (۱۹۹۳) گزارش می‌دهند که اگر از کودکان بخواهیم که ترسیم کنند به رشد میزان راه حل‌های آن‌ها کمک می‌شود (7). با این حال در بسیاری از مطالعات، این پیشرفت رخ نداده است و با وجود این گزارش، ترسیم تولید شده توسط دانش‌آموزان همیشه به بهبود فرایند حل مسئله منجر نمی‌گردد (20). فراتحلیل همبری (۱۹۹۹) نشان داد که استفاده از بازنمایی‌های گرافیکی در حل مسئله قابل آموزش است. با مقایسه روش‌های آموزشی مختلف، تدریس ترسیم دیاگرام‌ها بیشترین پیشرفت را در حل مسئله ارائه داد (5). بر این اساس، مطالعات مداخله‌ای توسط ون اسن و هماکر (۱۹۹۰) نشان داد که دانش‌آموزان کلاس پنجم ترسیم‌های زیادی از مسائل کلامی ایجاد کردند و می‌توانند از آموزش در تولید بازنمایی‌های گرافیکی برای حل مسئله بهره مند شوند و پس از مداخله راه‌حل‌های مسئله را بهبود بخشند در حالی که دانش‌آموزان کلاس اول و دوم قادر به انجام آن نبوده اند.. یافته‌ها نشان می‌دهد که ماهیت مسائلی که کودکان در حل مسائل کلامی حسابی تجربه می‌کنند، بر تصمیم آن‌ها برای ایجاد ترسیم تأثیر می‌گذارد (8).

همبری (۱۹۹۲) نتیجه گرفت که "در پایه‌های نخست دوره ابتدایی باید به جای تاکید بر راه حل ها، بر بازنمایی‌های مسئله تمرکز ویژه‌ای شود"(5). پژوهش‌های مختلف نشان می‌دهد که دانش‌آموزان دوره ابتدایی اغلب برای نشان دادن روابط ریاضی مشکل دارند و ترجیح می‌دهند محتوای تکلیف را به تصویر بکشند (21, 22). برای بهبود مهارت‌های بازنمایی کودکان، یک رویکرد هنوز کشف نشده را می‌توان در تولید بازنمایی‌های گرافیکی، نه به عنوان ابزاری برای حل مسئله، بلکه به عنوان مستنداتی برای فرآیندهای تفکر در کلاس مشاهده کرد و توضیح داد که چه در ذهنشان می‌گذرد.

در ادبیات پژوهشی، بین انواع مختلف بازنمایی‌های گرافیکی، تمایز قائل شده‌اند. هگارتی و همکاران (۱۹۹۹) بازنمایی تصویری و طرحواره‌ای را بصورت متمایز معرفی کردند. در بازنمایی‌های طرحواره‌ای تمرکز بر روابط فضایی است که در یک مسئله توصیف شده است. در بازنمایی‌های تصویری، تمرکز روی ظاهر اشیای توصیف شده در یک مسئله است (20).

یک ترسیم خودساخته هم ابزاری برای تجزیه و تحلیل و هم برای حل مسائل کلامی است ترسیم یک استراتژی برای تجزیه و تحلیل یک مسئله است، زیرا ترجمه قالب لفظی به یک قالب تصویری دانش آموز را مجبور می‌کند به داده‌ها و معنایی مسئله توجه کنند. طبق نظر وَن مِتِر و گارنر (۲۰۰۵) اگر خود یادگیرنده مسئولیت فرآیند تولید بازنمایی گرافیکی و هم محصول نهایی را بر عهده داشته باشند، این نوع بازنمایی، بازنمایی‌های گرافیکی تولید شده توسط یادگیرنده نامیده می‌شوند (23). در مطالعات اُت (۲۰۱۶,۲۰۱۷)، بازنمایی‌های گرافیکی زیر توسط دانش‌آموزان دوره ابتدایی برای حل مسائل کلامی متمایز شده اند (21, 22). سه ویژگی اصلی بازنمایی گرافیکی برای مسائل کلامی در مطالعه اُت (۲۰۱۶) معرفی شده است: *ساختار ریاضی، تطابق ریاضی، و درجه انتزاع* (21). یک ساختار ریاضی ممکن است بر اساس نظریه مجموعه رینکِنز (۱۹۷۳) تعریف شود: روابط بین عناصر نامنظم[1] (بی‌شکل) یک مجموعه را می‌توان با تعریف پیوندها روی یک مجموعه تعیین کرد. بدین ترتیب یک ساختار بر یک مجموعه تعریف می‌شود. در متن مسائل کلامی، اطلاعات با مقادیر و اسامی ارائه می‌شود که با افعال و حروف اضافه به یکدیگر مرتبط می‌شوند بنابراین به مسئله کلامی ساختار ریاضی داده شده است. برای بازنمایی گرافیکی، لازم است علائمی برای اشیا ساخته شود مانند مقادیر و اسامی که باید نشان داده شوند. روابط بین این علائم با چیدمان علائم بر روی ورق مشخص می‌شود. از آنجایی که ساختار ریاضی بر روی علائم این اشیاء تعریف شده است، که آن‌ها را اشیای مربوط به ساختار می‌نامند.. بازنمایی‌های گرافیکی با ساختار ریاضی را می‌توان به عنوان علائمی با خاصیت رابطه‌ای درک کرد که اساس آن‌ها یک نوشته است بنابراین، آن‌ها ویژگی نمودارها را به خود می‌گیرند (3).

اگر مسئله کلامی و بازنمایی گرافیکی هر دو "از نظر اطلاعاتی" معادل باشند، بین مسئله کلامی و یک بازنمایی گرافیکی تطابق ریاضی وجود دارد (24) و این در صورتی است که هر دو شرط زیر برآورده شوند: اولا، یک تطابق در مورد اشیاء وجود دارد. یعنی هم مقادیر و هم واحد اندازه‌گیری مطرح شده در مسئله را بتوان در ترسیم مشاهده نمود (25). ثانیاً، در مورد عملگرهای بین افعال و حروف اضافه در متن و ترتیب علائم برای اشیاء از نظر ساختاری مرتبط در ترسیم گرافیکی، تطابق وجود دارد.یعنی عملگری که برای حل مسئله مورد نیاز است مثل جمع یا ضرب را بتوان در ترسیم گرافیکی شناسایی نمود.

تطابق ریاضی ممکن است از نظر مقادیر اندازه گیری شده، واحدهای اندازه گیری یا عملگر، به صورت تطابق ریاضی کامل، جزئی یا ناموجود تعریف شود. در ابزار تجزیه و تحلیل، این حالات در یک ماتریس ۳×۳ مرتب شده اند بدین معنی که اگر تمام مقادیر اندازه گیری شده در مسئله را بتوان در بازنمایی گرافیکی شناسایی کرد آنگاه در مورد مقادیر، تطابق کامل وجود دارد یا اگر فقط تعدادی

از واحدهای اندازه گیری بیان شده در مسئله در بازنمایی گرافیکی قابل مشاهده باشد در مورد واحد اندازه گیری تطابق جزئی وجود دارد. همچنین ممکن است، مقادیر و عملگرها در بازنمایی گرافیکی مشخص نباشد در این صورت ترسیم‌ها بدون انطباق هستند. هرگاه مقادیر یا عملگرهایی که به صورت گرافیکی نشان داده می‌شوند غیر از موارد ذکر شده در مسئله کلامی است نمی‌شود. این مورد در نمونه‌های دیگر است.

ترسیم‌های کودکان برای مسائل کلامی کم و بیش واقع گرایانه است. برای تجزیه و تحلیل این موضوع، از ایده انتزاع استفاده می‌شود. طبق نظر پشک (۱۹۸۸)، درجه انتزاع را می‌توان به عنوان میزان تمرکز بر بازنمایی جنبه‌های ریاضی مسئله کلامی توصیف کرد. هر قدرکودکان در ترسیم‌های خود اشیای موجود در متن سوال را ترسیم کنند بدین معنی است که بازنمایی گرافیکی تولید شده توسط کودک واقع گرایانه‌تر و هر قدر برای ترسیم، از نمادها و علائم دیگری برای نشان دادن اشیای موجود در متن کمک بگیرند بازنمایی آن‌ها حالت انتزاعی و مجردتری به خود می‌گیرد (26). از این ایده برای تعریف درجه انتزاع استفاده می‌شود. لذا درجه انتزاع را در یک بازنمایی گرافیکی به عنوان درجه تمرکز بر بازنمایی جنبه‌های ریاضی مسئله کلامی توصیف می‌شود (22). ویژگی‌های کلیدی را می‌توان مستقل از یکدیگر تجزیه و تحلیل کرد. با این حال، پیش نیاز برای تعیین تطابق ریاضی و درجه انتزاع این است که اشیاء مرتبط با ساختار را بتوان در بازنمایی گرافیکی شناسایی کرد.با توجه به دو شاخص درجه انتزاع می‌تواند بالا یا پایین باشد. این دو شاخص به صورت زیر شناسایی شده است:

**شاخص ۱**: تمرکز بر روی اشیاء مرتبط با ساختار، هیچ شی به جز اشیا مرتبط با ساختار ترسیم نمی‌شوند**.** اگر هیچ شی دیگری بجز اشیایی که در متن سوال مورد نظر، رسم نکند، شاخص ۱ بالا است. ولی اگر فراگیر در ترسیم خود از اشیایی اضافه یا غیر از آنچه در مسئله گفته شده استفاده کند شاخص ۱ پایین است.

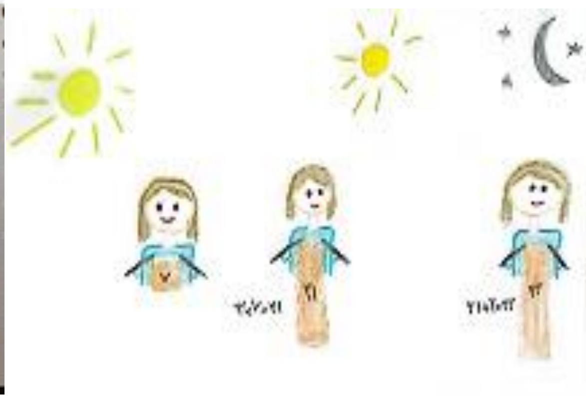
**شاخص ۲**:. تمرکز بر ویژگی‌های مرتبط به علم ریاضی اشیاء مرتبط با ساختار، علائم مربوط به اشیاء ساختاری تزئین نشده اند و فقط کیفیت‌های مرتبط ریاضی را نشان می‌دهند.

در بازنمایی‌ها، شاخص ۱ را می‌توان بالا در نظر گرفت هرگاه هیچ جسم دیگری ترسیم نشده باشد.اگر کودک در ترسیم خود از نمادها و علائم ریاضی وار استفاده کند شاخص ۲ بالا در نظر گرفته می‌شود هر دو شاخص درجه انتزاع را می‌توان کم یا زیاد بیان کرد. در نتیجه، می‌توان چهار دسته را برای درجه انتزاع تشخیص داد: اگر هر دو شاخص به ترتیب بالا یا پایین تشخیص داده شود *بالا–بالا* یا*کم–کم* و اگر یک شاخص به عنوان پایین و دیگری به عنوان بالا شناسایی شود *بالا–کم* یا *کم–بالا* در نظر گرفته می‌شود.

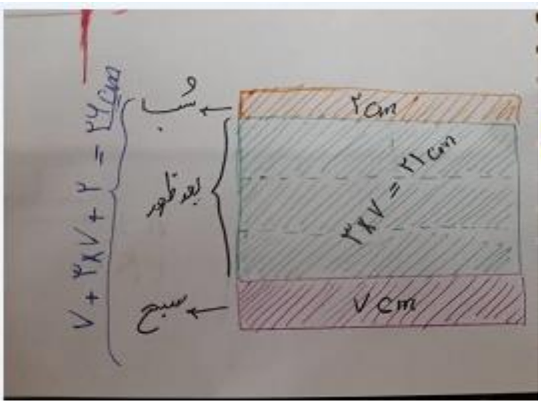
شکل شماره (۱) شش نمونه از بازنمایی‌های گرافیکی تولید شده توسط دانش‌آموزان در مطالعهٔ حاضر را نشان می‌دهد:

*" سارا در حال بافتن یک شال گردن است. صبح او ۷ سانتی متر بافت.بعد از ظهر سه برابر می‌بافد.در شب او ۲ سانتی متر دیگر نیز می‌بافد. در پایان روز او چقدر شال گردن بافته است؟"*

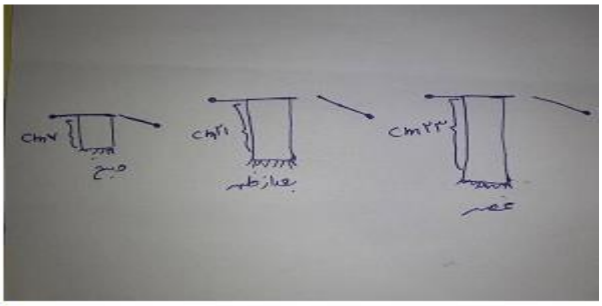
(الف)



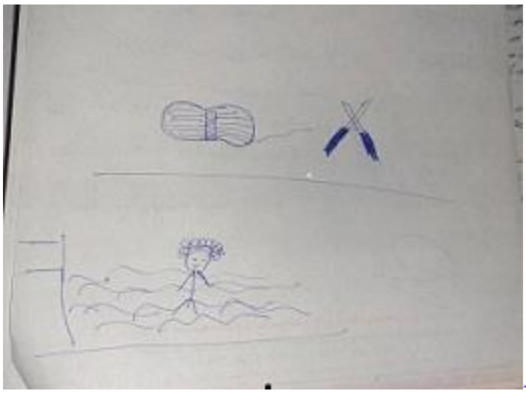
(ب)



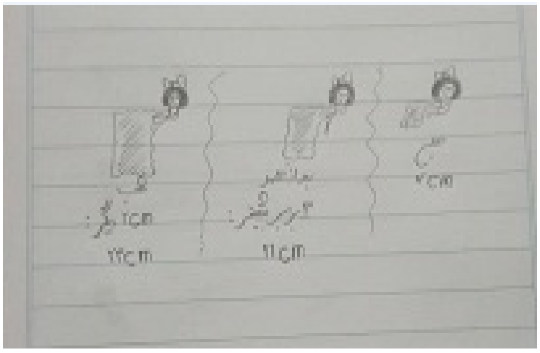

(پ)



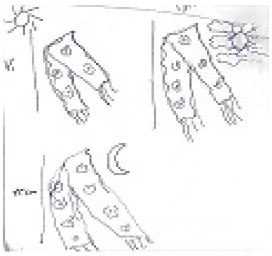

(ت)



(ج)



(چ)



**شکل ۱. نمونه ترسیم‌های انجام شده توسط کودکان**

هدف این مطالعه بررسی این سوال است که چگونه بازنمایی‌های گرافیکی ایجاد شده توسط یادگیرنده هنگامی که به عنوان مستنداتی برای دیگران مطرح می‌شوند و در کلاس بازتاب می‌یابند، توسعه میبایند و منجر به تسهیل در فرایند حل مسئله می‌شوند

به عبارت دیگر در این مطالعه،بازنمایی‌های گرافیکی هم به عنوان مستنداتی برای دیگران تولید شده‌اند و هم به عنوان ابزاری برای حل مسئله. علاوه بر این در پردازش آزمون و در مداخله تمرکز بر حل مسئله بود.

## روش پژوهش

این مطالعه با دو گروه(گروه مداخله و گروه کنترل) و دو آزمون(پیش آزمون و پس آزمون) طراحی شده است. قبل از مداخله کلاس ریاضی به صورت روتین برگزار شد. آزمودنی‌ها ۷۳ دانش آموز کلاس چهارم بودند که از مدارس ابتدایی شهر تهران بطور تصادفی انتخاب شدند. میانگین سنی آن‌ها ۹ سال و ۶ ماه بود. شرکت کنندگان گروه مداخله شامل ۳۵دانش آموز و گروه کنترل شامل ۳۸ کودک بودند. در مجموع ۳۴ کودک در هر گروه در تمام چهار روز آزمون شرکت کردند.

در مطالعه حاضر از آزمون تشریحی محقق ساخته استفاده شد. این آزمون شامل هشت مسئله کلامی بود. سه مورد از آن‌ها در ساختارهای ریاضی شش مساله آزمون، شبیه به ساختارهای مسایل دوره مداخله بود. دو مساله ساختار ریاضی دیگری را نشان می‌دهد. چهار مساله آزمون مشابه مساله‌های مداخله طراحی شده اند و فقط از نظر محتوا با هم تفاوت دارند و چهار مساله دیگر از هر دو جنبه متفاوت هستند دستورالعمل همانند مداخله بود. آزمایش در دو روز متوالی با چهار آیتم آزمایشی در هر روز انجام شد.

مسائل کلامی که در مداخله و آزمون‌ها انتخاب و طراحی گردید بر اساس فعالیت‌ها و مسائل کتاب درسی بود. معیار اصلی برای تدوین طراحی مسایل این بود که تا چه حد صورت بندی متن به بازنمایی گرافیکی ساختار ریاضی اشاره دارد. سه نوع را می‌توان متمایز کرد (جدول شماره ۱): مسائل کلامی از نوع A با این واقعیت مشخص می‌شود که اشیاء مرتبط به ساختار می‌توانند مستقیما ترسیم شوند و به ترتیب آن‌ها در متن شرح داده شده است. در مقابل، در مسائل کلامی نوع C، اشیاء مربوط به ساختار مستقیماً با ویژگی‌های فیزیکی قابل ترسیم نیستند. برای بازنمایی گرافیکی باید نشانه‌هایی برای این اشیا و چیدمان آن‌ها ابداع شود. برای تکالیف نوع B، فقط برخی از اشیاء که مربوط به ساختار هستند را می‌توان مستقیما ترسیم کرد. معیار دیگر تدوین تکالیف چالش برانگیز برای یادگیرندگان از طریق ساختارهای حسابی یا معنایی تکالیف بود. به عنوان مثال، تکالیف برای موقعیت‌های مقایسه یا معادلات خطی طراحی شد.

**جدول ۱. مثال‌هایی برای سه نوع مسئله**

| نوع A | نوع B | نوع C |
| --- | --- | --- |
| یک تصویر ۲۰ سانتی متر عرض و ۳۰ سانتی متر ارتفاع دارد. روی یک کاغذ بزرگ به گونه‌ای چسبانده می‌شود که یک حاشیه به عرض ۱۵ سانتی متر از هر طرف باقی بماند. عرض و ارتفاع کاغذ بزرگ چقدر باید باشد؟ | یک صنوبر در سال حدود ۱۵ سانتی متر رشد می‌کند. در باغ یک صنوبر به ارتفاع ۸۳ سانتی متر وجود دارد. چند ساله است؟ | در یک مسابقه، تینا ۷۴ ثانیه طول می‌کشد. آلا ۱۲ ثانیه کمتر از تینا نیاز دارد. مونا ۸۴ ثانیه طول می‌کشد. آلا به چند ثانیه زمان نیاز دارد؟مونا چند ثانیه بیشتر از آلا طول می‌کشد؟ |

در مداخله به دانش‌آموزان آموزش داده نمی‌شود که یک نمودار تجویز شده بسازند، بلکه در عوض تشویق می‌شوند تا یک بازنمایی گرافیکی بسازند که با نیازهای خودشان سازگار باشد از دانش‌آموزان خواسته می‌شود پس از ترسیم بازنمایی گرافیکی با توجه به ویژگی‌های آن (ساختار، تطابق و انتزاع) مسئله را حل کنند، لازم است راه حل را نیز یادداشت کنند. در دستورالعمل این مداخله دانش‌آموزان از بازنمایی‌های گرافیکی به عنوان یک رهیافت استفاده میکنند ودر آن تمرکز بر ارتباط بین بازنماییهای گرافیکی و راه حلهای صحیح بوده است در این مقاله، یک مطالعه مداخله‌ای شرح داده شده است که برای بررسی اینکه آیا تشویق دانش‌آموزان ابتدایی برای ایجاد ترسیم‌هایی از مسائل کلامی ریاضی عملکرد حل مسئله را تسهیل می‌کند یا خیر، تنظیم شده‌اند.مداخلات شامل ۶۰ تا ۹۰ دقیقه تمرین بود و سودمندی ترسیم‌های خودساخته را برای حل مسائل کلامی نشان داد.

در این مطالعه مداخله به دو مرحله تقسیم شد که هر مرحله به صورت هفتگی انجام گردید (22). در مرحله اول، کلاس گروه مداخله از پژوهشگر[1] مساله کلامی هفته را دریافت کردند. از هر دانش آموز خواسته شد تا برای این مسئله کلامی داده شده یک بازنمایی گرافیکی تولید کند که شامل همه چیزهایی است که برای درک و حل این مسئله برای او مهم است. به منظور این که دانش‌آموزان بازنمایی گرافیکی خود را تا حد امکان به طور کامل ایجاد کنند بر اساس مطالعهٔ کُکس (۱۹۹۹) مقرر گردید که دانش‌آموزان یک بازنمایی گرافیکی تولید کنند که برای دیگران قابل درک باشد (16). هر دانش آموز نوشته را با بازنمایی گرافیکی خود به معلم تحویل می‌داد. از بین این بازنمایی‌های گرافیکی ایجاد شده توسط یادگیرنده، حداکثر سه بازنمایی گرافیکی توسط نویسنده برای مرحله دوم مداخله انتخاب شد. انتخاب‌ها به گونه‌ای انجام شد که مثال‌ها تا حد ممکن در نحوه انجام طراحی متفاوت بودند. بسته به اینکه کدام بازنمایی گرافیکی در مستندات کودکان یافت می‌شد، در مطالعه حاضر سعی شد نمونه‌هایی با ساختار ریاضی، تطابق ریاضی یا درجه انتزاع متفاوت انتخاب شوند. فرودنتال بازتاب‌ها را اینگونه تعریف کرد که بازتاب یادگیرندگان را قادر می‌سازد تا توانایی‌های خود را در بازنمایی گرافیکی توسعه دهند. در مرحله دوم، این بازنمایی‌های گرافیکی انتخاب شده اساس بحث‌های بازتابی با سایر دانش‌آموزان کلاس را تشکیل دادند. نسخه‌های بزرگ شده از مستندات منتخب دانش‌آموزان یکی پس از دیگری روی تخته سیاه نصب شد. هدف از بازتاب، تشریح نمایش گرافیکی نشان داده شده و در نتیجه تلاش برای فهمیدن نقطه نظر دانش آموز از بازنمایی گرافیکی بود. در مرحله ی دوم مداخله، از دانش آموزی که تولید کنندهٔ بازنمایی گرافیکی بود، خواسته شد در صورت تمایل در پایان بحث کلاسی (بازتاب) در مورد بازنمایی گرافیکی خود اظهار نظر کند. از آنجایی که تفسیر بازنمایی‌های گرافیکی برای کودکان یک چالش است، ابتدا هر یک از بازنمایی‌های گرافیکی به صورت جداگانه مورد بررسی و تجزیه و تحلیل قرار گرفت. در هنگام بازتاب، دانش‌آموزان سعی می‌کردند بازنمایی‌های گرافیکی را بهبود بخشند و در مورد احتمالات مختلف بحث کنند. هنگامی که تمام بازنمایی‌های گرافیکی روی تخته سیاه به صورت جداگانه یکی پس از دیگری بازتاب شد، از دانش‌آموزان خواسته شد تا آن‌ها را با یکدیگر مقایسه کنند و

[1]. نویسنده اول مقاله به عنوان معلم، مجری تحقیق بود.

شباهت‌ها و تفاوت‌ها را بررسی کنند. این مقایسه به نوبه خود می‌تواند به نحوه انجام ترسیم، نحوه ترسیم ساختار ریاضی، تطابق ریاضی یا درجه انتزاع مرتبط شود. این مقایسه‌ها منجر به تغییر دیدگاه گردید. دانش‌آموزان همچنین بحث می‌کردند که چرا یک بازنمایی گرافیکی یا دیگری به خوبی با مسئله کلامی داده شده متناسب است. در بحث‌ها به دو جنبه ریاضی و محتوایی مسئله کلامی اشاره داشتند. برخی از کودکان بازنمایی‌های گرافیکی انتزاعی‌تری را ترجیح می‌دادند و بر جنبه‌های ریاضی تمرکز می‌کردند. برخی دیگر بازنمایی‌های گرافیکی واقعی‌تری را ترجیح می‌دادند زیرا محتوای مسئله کلامی برای آن‌ها مهم بود.سپس در مورد راه حل‌های درست در کلاس بحث شد.

برای تجزیه و تحلیل بازنمایی‌های گرافیکی از کدگذاری نظری استراوس و کوربین (۱۹۹۶) استفاده شد. بررسی ساختار ریاضی به دو دسته تقسیم می‌شود:۱) اگر هم اشیای بیان شده در مسئله و هم روابط بین آن‌ها در ترسیم قابل مشاهده باشد نمره ۱ و در غیر اینصورت نمره صفر ۲) اگر فقط روابط بین اشیا مشهود باشد نمره ۱ و در غیر اینصورت صفر منظور می‌گردد. در شکل شماره (۱)در بخش اول ساختار ریاضی ترسیم‌های (الف، ب، پ، ج، و چ)نمره یک و (ت)نمره صفر داده می‌شود. و در بخش دوم ساختار ریاضی در ترسیم (ت) نمره یک و در بقیه نمره یک داده می‌شود.

برای تعیین تطابق ریاضی ترسیم چه از لحاظ مقادیر یا واحد اندازه گیری و یا عملگر، اگر تطابق کامل بود نمره ۱، اگر تطابق جزئی بود نمره ۰/۵ و اگر تطابقی وجود نداشت نمره صفر منظور گردید. دارد در(الف، ب، پ، ج، چ)شکل ۵، یک تطابق کامل در مورد مقادیر اندازه گیری شده وجود دارد.پس نمره یک داده می‌شود در (ت)، هیچ تطابقی وجود ندارد، و نمره صفر می‌گیرد.در ترسیم‌های (الف و ت) واحد اندازه گیری مشخص نشده و نمره صفر منظور می‌شود در ترسیم(چ) فقط یکی از واحدها مشاهده می‌شود پس تطابق جزئی است و نمره نیم داده می‌شو.در بقیه ترسیم‌ها تطابق کامل است و نمره یک داده می‌شود. در مورد عملگر در(الف، ب، پ، ج) تطابق کامل وجود دارد نمره یک و در(چ) تطابق جزئی وجود دارد نمره نیم و در (ت) تطابقی وجود ندارد بنابراین نمره صفر تعلق می‌گیرد.

برای تعیین هر دو شاخص درجه انتزاع، اگر درجه پایین بود نمره صفر و اگر درجه بالا بود نمره ۱ در نظر گرفته شد. در بازنمایی‌های(ب، پ) شکل شماره (۱)، شاخص ۱ را می‌توان بالا در نظر گرفت زیرا هیچ جسم دیگری ترسیم نشده است پس به شاخص ۱ درجه انتزاع، نمره یک داده می‌شود اما در شکل (الف،ت، ج و چ) این شاخص کم است و نمره صفر داده می‌شود. شاخص ۲ را می‌توان در (ب) بالا و در مثال‌های دیگر پایین در نظر گرفت، پس شاخص ۲ درجه انتزاع فقط در (ب) نمره یک می‌گیرد.

برای تعیین درستی حل مسئله به راه حل با پاسخ درست ۱ نمره، برای راه حل ناقص نیم نمره وبرای دانش‌آموزانی که هیچ راه حلی نداشتند نمره صفر در نظر گرفته شد. ابزار تجزیه و تحلیل این امکان را فراهم کرد که به وضوح هر بازنمایی گرافیکی تولید شده توسط یادگیرنده بر اساس ساختار ریاضی، تطابق ریاضی،درجه انتزاع و راه حل وجواب درست به یک گروه اختصاص داده شود. پایایی خوب بین ارزیاب $K = 0.81$ (ساختار ریاضی)، $K = 0.99$ (تطابق ریاضی با توجه به مقادیر اندازه‌گیری شده)، $K = 0.96$

(تطابق ریاضی با توجه به واحدهای اندازه‌گیری)، K = 0.99 (تطابق ریاضی با توجه به عملگر)، و K = 0.90 (درجه انتزاع) و ( K=0.89عملکرد حل مسئله) اجازه داد تا این ابزار تجزیه و تحلیل در مطالعه استفاده شود.

## یافته‌ها

در مطالعه حا ضر ۱۰۴۴مستندات تولید شده توسط کودکان، توسط دو معلم با مدرک کارشناسی ارشد بعنوان ارزیاب کدگذاری گردید. پایایی بین ارزیاب‌ها در دو زمان آزمون بین دو مقدار K = 0.95 و K = 0.98 متغیر بود و بنابراین بسیار خوب در نظر گرفته شد. فرضیه‌های آماری در سطح آلفای ۵ درصد مورد آزمایش قرار گرفتند. بنابراین، از نمونه کاهش یافته (N =34 در هر گروه) استفاده شد. بنابراین، معیار حجم نمونه بیشتر از ۳۰ نفر در هر گروه، به عنوان پیش نیاز برای انجام تحلیل واریانس دو طرفه (ANOVA)، برآورده شد.

ANOVA دو عاملی (تحلیل واریانس دوطرفه) برای هر یک از سه ویژگی کلیدی بازنمایی‌های گرافیکی و برای حل درست مسئله برای مقایسه اثرات اصلی زمان آزمایش و گروه و اثر تعامل بین زمان آزمایش و گروه انجام شد. مقادیر کل برای هر هشت آیتم در یک زمان آزمایشی تشکیل شد. جدول ۲ اثرات اصلی و تعامل بین آن‌ها را نشان می‌دهد.

**جدول ۲. اثرات اصلی زمان انجام آزمایش (SMA[1]) و گروه (G) و اثرات تعامل (SMA × G)**

| ویژگی‌های کلیدی | | عامل | F-value | Df | p value | مجذور اتای جزئی(ηp۲) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ساختار ریاضی | اشیاء مرتبط با ساختار و روابط آن‌ها | SMA | ۳۰.۱۲۳ | ۱.۸۴۵ | <.۰۰۱.۰۰۳ | .۲۳۸ |
| | | G | ۶.۱۴۸ | ۲ | | .۱۱۲ |
| | | SMA × G | ۱۱.۳۹۸ | ۳.۶۹۰ | <.۰۰۱ | .۱۸۹ |
| | فقط روابط | SMA | ۹۳.۹۰۶ | ۲ | <.۰۰۱ | .۴۸۷ |
| | | G | ۱۲.۰۰۹ | ۲ | <.۰۰۱ | .۱۸۹ |
| | | SMA × G | ۱۵.۱۲۳ | ۴ | <.۰۰۱ | .۲۲۹ |
| تطابق ریاضی | مقدار اندازه گیری شده | SMA | ۵۶.۹۰۱ | ۲ | <.۰۰۱ | .۳۸۲ |
| | | G | ۲.۵۳۵ | ۲ | .۰۸۹ | .۰۵۴ |
| | | SMA × G | ۱۲.۳۴۴ | ۴ | <.۰۰۱ | .۱۹۸ |
| | واحد اندازه گیری | SMA | ۸۰.۱۲۴ | ۲ | <.۰۰۱ | .۴۴۸ |
| | | G | ۴.۵۷۱ | ۲ | .۰۱۵ | .۰۷۹ |
| | | SMA × G | ۲۳.۷۸۹ | ۴ | <.۰۰۱ | .۲۹۸ |
| | عملگرها | SMA | ۸۲.۲۳۱ | ۲ | <.۰۰۱ | .۴۷۰ |
| | | G | ۱۰.۸۹۹ | ۲ | <.۰۰۱ | .۲۰۱ |
| | | SMA × G | ۱۴.۶۶۳ | ۴ | <.۰۰۱ | .۲۲۸ |
| درجه انتزاع | شاخص ۱ | SMA | ۲۷.۹۰۸ | ۱.۷۷۹ | <.۰۰۱ | .۲۳۳ |
| | | G | ۱.۷۹۸ | ۲ | .۱۶۰ | .۰۴۰ |
| | | SMA × G | ۳.۰۵۸ | ۳.۵۵۹ | .۰۲۱ | .۰۵۸ |
| | شاخص ۲ | SMA | ۱۳.۱۰۸ | ۲ | <.۰۰۱ | .۱۱۸ |
| | | G | ۰.۳۸۸ | ۲ | .۶۷۷ | .۰۰۷ |

[1] منظور از SMA حروف اول کلمات ساختار، تطلبق و انتزاع می‌باشد.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| SMA × G | ۰.۲۹۷ | ۴ | .۸۷۲ | .۰۰۸ |

## ساختار ریاضی

برای بررسی ساختار ریاضی مستندات، در مرحله اول، بازنمایی علائم برای اشیاء مرتبط با ساختار و چیدمان آن‌ها مورد واکاوی قرار گرفت. سپس مرحله دوم، تنها بازنمایی روابط به طور خاص بررسی شد. جدول شماره ۳ میانگین مقادیر و انحراف معیار گروه‌ها را در پیش آزمون، پس ازمون نشان می‌دهد.

**جدول ۳. مقادیر میانگین و انحراف معیار با توجه به ساختار ریاضی (N =34در هر گروه)**

| | | پیش آزمون | پس آزمون |
|---|---|---|---|
| اشیاء مرتبط با ساختار و روابط آن‌ها | گروه مداخله | M ۴.۷۲ (SD ۱.۸۳) | M ۷.۰۵(SD ۱.۱۵) |
| | گروه کنترل | M ۵.۵۸ (SD ۲.۰۳) | M ۵.۱۶ (SD ۲.۱۶) |
| فقط روابط | گروه مداخله | M ۳.۸۵ (SD ۱.۴۵) | M ۶.۱۴(SD ۱.۳۳) |
| | گروه کنترل | M ۳.۶۹ (SD ۱.۶۹) | M ۴.۷۱ (SD ۱.۷۱) |

## بازنمایی اشیاء مرتبط با ساختار و روابط آن‌ها

یافته‌های جدول شماره (۳) نشان داد که زمان انجام آزمایش با گروه‌ها از نظر آماری در سطح معنی‌داری ۰.۰۵ اثربخشی دارد. از طرفی اثر متقابل آن‌ها $\eta p^2 = 0.189$ نیز معنی دار است (p<۰/۰۰۱ ). در زمان اجرای پس‌آزمون، بین گروه مداخله و گروه کنترل (p<۰/۰۰۱) تفاوت معنی‌داری وجود داشت. اما مقایسه جفت‌های باقی‌مانده تفاوت معنی‌داری را نشان نمی‌دهند (p>۰.۰۵). بنابراین پس از مداخله، گروه آزمایش بیشتر از گروه‌های کنترل، اشیاء و روابط مرتبط با ساختار را در مستندات نشان می‌دهند.

## بازنمایی فقط روابط

بر اساس جدول ۳، از نظر آماری هر دو اثر در سطح معنی‌داری ۰.۰۵ هستند. از طرفی اثر تعامل ($\eta p^2$=0.229) نیز معنی دار است (p<۰/۰۰۱).) در زمان پس آزمون، بین گروه مداخله و گروه کنترل (p<۰/۰۰۱) تفاوت معناداری وجود دارد. اما مقایسه‌های جفت‌های باقی‌مانده تفاوت معنی‌داری را نشان نمی‌دهند بنابراین پس از مداخله، گروه آزمایش بیشتر از گروه‌های کنترل، روابط را در مستندات نشان می‌دهد.

## تطابق ریاضی

تطابق ریاضی به طور جداگانه برای *مقادیر اندازه گیری شده*، *واحدهای اندازه گیری* و *عملگرها* مورد بررسی قرار گرفت. جدول شماره ۴ میانگین و انحراف معیار گروه‌ها را نشان می‌دهد.

بر اساس نتایج، اثر اصلی زمان انجام آزمایش معنی‌دار است (p<۰/۰۰۱) اما اثر اصلی گروه معنی‌دار نیست (p=۰/۰۸۹). اثر تعامل معنی دار است (p<۰/۰۰۱).

**جدول ۴. مقادیر میانگین و انحراف معیار با توجه به تطابق ریاضی (N = 34 در هر گروه)**

| | | پیش آزمون | پس آزمون |
|---|---|---|---|
| مقادیر اندازه گیری شده | گروه مداخله | M ۲.۱۵ (SD.۷۱) | M ۴.۳۲ (SD ۱.۵۶) |
| | گروه کنترل | M ۲.۲۵ (SD ۱.۴۲) | M ۳.۴۶ (SD ۱.۷۵) |
| واحدهای اندازه گیری | گروه مداخله | M ۲.۱۲ (SD ۱.۳۴) | M ۴.۸۳ (SD ۲.۰۲) |
| | گروه کنترل | M ۲.۱۵ (SD ۲.۱۶) | M ۲.۸۸ (SD ۲.۲۳) |
| عملگرها | گروه مداخله | M ۲.۵۵ (SD ۱.۲۹) | M ۴.۶۱ (SD ۱.۶۷) |
| | گروه کنترل | M ۲.۱۷ (SD ۱.۰۳) | M ۲.۴۲ (SD ۱.۲۳) |

بر اساس نتایج جدول ۴، هر دو اثر اصلی از نظر آماری در سطح معنی داری ۰.۰۵ معنی دار هستند. اثر تعامل نیز معنی دار است (p<۰/۰۰۱).از طرفی مقایسه دو به دو تفاوت معنی داری را بین گروه مداخله و گروه کنترل در زمان پیش آزمون نشان داد (p=۰/۰۰۶). مستندات دانش‌آموزان گروه مداخله کمترین مقدار را برای تطابق واحدهای اندازه گیری دارد. همچنین بین گروه مداخله و گروه کنترل در زمان پس آزمون تفاوت معناداری وجود دارد (p=۰/۰۴۹). نقطه ضعف گروه مداخله مشاهده شده در پیش آزمون در زمان پس آزمون به یک مزیت تبدیل می‌شود.

### عملگرها

با توجه نتایج جدول۴، هر دو اثر اصلی از نظر آماری در سطح معنی‌داری ۰.۰۵ معنی‌دار هستند. اثر تعامل نیز معنی دار است (p<۰/۰۰۱). از طرفی مقایسه زوجی تفاوت معنی داری را برای زمان پس آزمون بین گروه مداخله و گروه کنترل نشان داد (p<۰/۰۰۱). پس از مداخله، گروه آزمایش تطابق ریاضی عملگرها در مستندات را بیشتر از گروه کنترل مشاهده می‌کند.

### درجه انتزاع

دو شاخص درجه انتزاع به صورت جداگانه بررسی شد. در جدول (۵)میانگین گروه‌ها و انحراف معیار نشان داده شده است.

**جدول ۵. مقادیر میانگین و انحراف معیار با توجه به درجه انتزاع (N = 34 در هر گروه)**

| | | پیش‌آزمون | پس آزمون |
|---|---|---|---|
| شاخص ۱ | گروه مداخله | M ۳.۸۵ (SD ۱.۲۳) | M ۴.۰۹ (SD ۱.۳۴) |
| (تمرکز بر روی اشیاء مرتبط با ساختار) | گروه کنترل | M ۳.۸۸ (SD ۱.۷۲) | M ۴.۲۷ (SD ۱.۹۳) |
| شاخص ۲ | گروه مداخله | M ۳.۰۰ (SD ۱.۴۲) | M ۳.۳۷(SD ۱.۴۰) |
| (تمرکز بر روی کیفیت‌های مرتبط ریاضی آن‌ها) | گروه کنترل | M ۲.۸۱ (SD ۱.۶۳) | M ۳.۰۳ (SD ۱.۵۷) |

### شاخص ۱

بر اساس جدول ۵، اثر اصلی زمان انجام آزمون معنی دار است ($p<0/001$) اما اثر اصلی گروه معنی دار نبوده است ($p=0/0157$). اثر تعامل ($\eta p2= 0.058$)معنی دار است ($p=0/023$). مقایسه‌های زوجی تفاوت معنی‌داری ($p>0/05$) را در پیش‌آزمون و پس‌آزمون نشان نمی‌دهد. پس از مداخله، گروه آزمایش در مقایسه با گروه کنترل، بیشتر بر روی اشیاء ساختاری در بازنمایی‌های گرافیکی تمرکز نمی‌کند.

### شاخص ۲

بر اساس نتایج، همه اثرات از نظر آماری در سطح معنی داری ۰.۵ به جز اثر اصلی زمان انجام آزمایش نیستند. پس از مداخله، گروه آزمایش در مقایسه با گروه کنترل بیشتر بر کیفیت‌های ریاضی اشیاء مرتبط با ساختار تمرکز نمی‌کنند.

## بحث و نتیجه‌گیری

هدف پژوهش حاضر، ارتباط بین بازنمایی‌های تولید شده دانش‌آموزان و توانایی حل مسأله در آن‌ها بود. نتایج نشان داد که در پیش آزمون، میانگین مقادیر برای بازنمایی روابط ریاضی در هر سه گروه پایین است. این یافته مشاهدات قبلی را تأیید می‌کند (هسمن ۲۰۰۶، اُت ۲۰۱۶). پس از مداخله، در گروه آزمایش اغلب بازنمایی‌های گرافیکی مرتبط با شی و خصوصا، بازنمایی‌های گرافیکی بیشتر بصورت دیاگرامی تولید شدند. یافته‌های مربوط به تطابق ریاضی با توجه به عملگرها نشان داد که در گروه آزمایش پس از مداخله نه تنها به میزان قابل توجهی روابط ریاضی را نسبت به گروه کنترل نشان داده شد، بلکه به طور قابل توجهی به تطابق ریاضی در مورد عملگرهای داده شده توجه بیشتری شد. همچنین یادگیرندگان به نمایش مقادیر اندازه گیری شده و واحدهای اندازه گیری توجه بیشتری دارند. از آنجایی که اثر تعامل قابل توجه است، این تحولات را می‌توان به مداخله نسبت داد. سطح اثر تعامل نشان می‌دهد که تفاوت بین گروهها نیز عملاً معنی دار است.. این نتایج همچنین یافته‌های وَن دیک و همکاران (۲۰۰۳) را تایید و تکمیل می‌کند، آن‌ها معتقدند که ترکیبی از بازنمایی‌های گرافیکی خود تولید شده و فرآیندهای بازتاب بر روی مستندات ممکن است بازنمایی گرافیکی ساختارهای ریاضی را با تطابق ریاضی مسئله کلامی داده شده ارتقا بخشد (19).

در مورد میزان انتزاع، یافته‌ها انتظارات را برآورده نمی‌کند بطوریکه گروه مداخله پس از مداخله به سطح بالاتری از انتزاع نسبت به گروه کنترل نرسید. درجه پایین انتزاع یک روش معمولی برای ترسیم در بین کودکان است (12). به نظر می‌رسد که کودکان ترسیم‌های واقع گرایانه را برای دیگران قابل درک‌تر می‌دانند. این مکمل یافته‌های حق‌وردی و گویا (۱۳۹۸) و پانتزیارا و همکاران (۲۰۰۹) است که دریافتند یادگیرندگان سعی می‌کنند بازنمایی‌های طرحواره‌ای را به بازنمایی‌های تصویری تبدیل کنند تا آن‌ها را بهتر تفسیر کنند (14, 18). با این حال، با درجه انتزاع نسبتاً ثابت، دانش‌آموزان گروه آزمایش بعد از مداخله به ساختار ریاضی و تطابق بیشتر توجه کردند.

یافته‌های مربوط به عملکرد حل مسئله نشان داد در گروه آزمایش پس از مداخله نمرات حل مسئله دانش‌آموزان بطور قابل ملاحظه‌ای افزایش یافت.. بنابراین یافته‌ها نشان می‌دهد که تجزیه و تحلیل یک مسئله کلامی با استفاده از یک بازنمایی گرافیکی خود تولید شده، یک تکنیک اکتشافی مفید است.

در مطالعه حاضر، ابتدا دانش‌آموزان پایه چهارم بازنمایی‌های گرافیکی خود را برای یک مسئله کلامی معین به عنوان مستنداتی برای دیگران و سپس به عنوان ابزاری برای حل مسئله تولید کردند و سپس برخی از این بازنمایی‌های گرافیکی تولید شده توسط دانش‌آموزان را در کلاس منعکس کردند. هدف از بازتاب، توضیح جمعی بازنمایی گرافیکی نشان داده شده و در نتیجه تلاش برای درک دیدگاه نویسنده بازنمایی گرافیکی بود. نتایج نشان داد که با استفاده از مداخله انجام شده، فراگیران قادر خواهند بود به ویژ گی‌های بازنمایی‌های گرافیکی که خودشان ساخته بودند، توجه بیشتری کنند و همچنین عملکرد آن‌ها در حل مسئله بهبود یافته بود نتایج نشان می‌دهد می‌توان اساس استفاده از بازنمایی‌های گرافیکی را به عنوان ابزاری برای حل مسئله ایجاد کرد. در مجموع به نظر می‌رسد تدریس ترکیبی از تولید خود بازنمایی‌های گرافیکی و فرایندهای بازتاب روی آن‌ها در کلاس برای پیشرفت شایستگی‌های بازنمایی‌های گرافیکی و بهبود روند حل مسئله مثبت باشند.

## تعارض منافع

در انجام مطالعه حاضر، هیچ‌گونه تضاد منافعی وجود ندارد.

## مشارکت نویسندگان

در نگارش این مقاله تمامی نویسندگان نقش یکسانی ایفا کردند.

## موازین اخلاقی

در انجام این پژوهش تمامی موازین و اصول اخلاقی رعایت گردیده است.

## حامی مالی

این پژوهش حامی مالی نداشته است.

## منابع

1. Bortz J, Schuster C. Statistik für Human- und Sozialwissenschaftler [Statistics for human and social scientists]. 7 ed. Berlin, Heidelberg: Springer; 2010.
2. Roth WM, McGinn MK. Inscriptions: Toward a theory of representing as social practice. Review of Educational Research. 1998;68(1):35-59. doi: 10.3102/00346543068001035.
3. Dörfler W. Mathematical reasoning: Mental activity or practice with diagrams. In: Niss M, editor. ICME 10 proceedings, regular lectures, CD-Rom. Roskilde, Denmark: Roskilde University and IMFUFA; 2008. p. 17.
4. Heinze A, Star JR, Verschaffel L. Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik. 2009;41:535-40. doi: 10.1007/s11858-009-0214-4.
5. Hembree R. Experiments and relational studies in problem solving: A meta-analysis. Journal for Research in Mathematics Education. 1992;23(3):242-73. doi: 10.5951/jresematheduc.23.3.0242.
6. Fagnant A, Vlassis J. Schematic representations in arithmetical problem solving: Analysis of their impact on grade 4 students. Educational Studies in Mathematics. 2013;84:149-68. doi: 10.1007/s10649-013-9476-4.
7. Lopez Real F, Veloo PK. Children's use of diagrams as a problem-solving strategy. In: Hirabayashi N, Shigematsu L, editors. Proceedings of the Seventeenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education. Tsukuba, Japan: University of Tsukuba; 1993. p. 169-76.
8. Van Essen G, Hamaker C. Using self-generated drawings to solve arithmetic word problems. Journal of Educational Research. 1990;83(6):301-12. doi: 10.1080/00220671.1990.10885976.
9. Goldin GA, Shteingold N. Systems of representations and the development of mathematical concepts. In: Cuoco A, Curcio FR, editors. The roles of representation in school mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics; 2001. p. 1-23.
10. Van Garderen D, Montague M. Visual-spatial representations and mathematical problem solving. Learning Disabilities Research & Practice. 2003;18:246-54. doi: 10.1111/1540-5826.00079.
11. Munez D, Orrantia J, Rosales J. The effect of external representations on compare word problems: Supporting mental model construction. The Journal of Experimental Education. 2013;81(3):337-55. doi: 10.1080/00220973.2012.715095.
12. Schipper W. Handbuch für den Mathematikunterricht a Grundschulen. Braunschweig, Germany: Schroedel; 2009.
13. Verschaffel L, Greer B, De Corte E. Making sense of word problems. Lisse, the Netherlands: Swets & Zeitlinger Publishers; 2000.
14. Haghverdi M, Wiest LR. The Effect of Contextual and Conceptual Rewording on Mathematical Problem-Solving Performance. Mathematics Educator. 2016;25(1):56-73.
15. Sturm N. Problemhaltige Textaufgaben lösen. Wiesbaden, Germany: Springer Spektrum; 2018.
16. Cox R. Representation construction, externalised cognition and individual differences. Learning and Instruction. 1999;9:343-63. doi: 10.1016/S0959-4752(98)00051-6.
17. Larkin JH, Simon HA. Why a diagram is (sometimes) worth ten thousand words. Cognitive Science. 1987;11:65-99. doi: 10.1111/j.1551-6708.1987.tb00863.x.
18. Pantziara M, Gagatsis A, Elia I. Using diagrams as tool for the solution of non routine mathematical problems. Educational Studies in Mathematics. 2009;72:39-60. doi: 10.1007/s10649-009-9181-5.
19. Van Dijk IMAW, Van Oers B, Terwel J. Providing or designing? Constructing models in primary maths education. Learning and Instruction. 2003;13:53-72. doi: 10.1016/S0959-4752(01)00037-8.
20. Hegarty M, Kozhevnikov M. Types of visual-spatial representations and mathematical problem solving. Journal of Educational Psychology. 1999;91(4):684-9. doi: 10.1037/0022-0663.91.4.684.
21. Ott B. Textaufgaben grafisch darstellen: Entwicklung eines Analyseinstruments und Evaluation einer Interventionsmaßnahme. Münster, Germany: Waxmann; 2016.
22. Ott B. Children's drawings for word problems - Design of a theory and an analysis tool. In: Dooley T, Gueudet G, editors. Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME10, February 1-5, 2017). Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME; 2017. p. 3984-91.
23. VanMeter P, Garner J. The promise and practice of learner-generated drawing: Literature review and synthesis. Educational Psychology Review. 2005;17(4):285-325. doi: 10.1007/s10648-005-8136-3.
24. Palmer SE. Fundamental aspects of cognitive representation. In: Rosch E, Lloyd BB, editors. Cognition and categorization. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates; 1978. p. 259-303.
25. Kirsch A. Mathematik wirklich verstehen. 3 ed. Cologne, Germany: Aulis-Verlag Deubner; 1997.
26. Peschek W. Untersuchungen zur Abstraktion und Verallgemeinerung. In: Dörfler W, editor. Kognitive Aspekte mathematischer Begriffsentwicklung. Vienna, Austria: Hölder-Pichler-Tempsky; 1988. p. 127-90.